Concours d'admission en première année du Cycle de Formation d'Architectes de l'École Nationale Supérieure des Arts et Industries de Strasbourg

Épreuves écrites définitives

MATHÉMATIQUES - EXERCICES

Durée : 4 heures - Coefficient : 4

Exercice 1

1° Préliminaire

Montrer que pour toutes applications bornées r et s de R dans R on a :

$$\left|\operatorname*{Sup}_{x\in R} r(x) - \operatorname*{Sup}_{x\in R} s(x)\right| \leq \operatorname*{Sup}_{x\in R} |r(x) - s(x)| .$$

On pourra admettre ce résultat si l'on n'arrive pas à le démontrer.

2° On considère f et g deux applications de R dans R.

Pour tout réel a, on définit l'application h_a de R dans R par $x \mapsto h_a(x) = f(x) + g(x+a)$.

Lorsque h_a est majorée, on pose $H(a) = \operatorname*{Sup}_{x\in R} h_a(x)$.

A) Exemple

On suppose que $x \mapsto f(x) = -|x|$ et que $x \mapsto g(x) = |x|$.

a) Préciser les représentations graphiques de l'application h_a selon les différentes valeurs du réel a.

b) En déduire l'expression de $H(a)$ pour tout a réel.

B) On suppose que les applications f et g sont positives ou nulles et continues sur R et qu'elles admettent toutes les deux des limites nulles en $-\infty$ et en $+\infty$.

a) Montrer que f et g sont bornées sur R.
En déduire que H est définie sur R.

b) On suppose de plus que g est dérivable sur R et que g' est bornée sur R.

i) Soit a_0 réel donné.

Montrer que $\operatorname*{Sup}_{x\in R} |g(x+a) - g(x+a_0)|$ tend vers 0 lorsque a tend vers a_0.

ii) En déduire que l'application H est continue en a_0.

iii) Montrer que pour tout réel a, il existe un réel β tel que $H(a) = h_a(\beta)$.

Exercice 2

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R}$ d'origine le point O et de base orthonormée $b = (\vec{u}, \vec{v})$.
Un point M du plan est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x_M, y_M) dans le repère $\mathcal{R}$.
Soit k un réel strictement positif et soit $\mathcal{H}$ la courbe d'équation $xy = k$ dans le repère $\mathcal{R}$.
On appelle « triangle inscrit dans $\mathcal{H}$ » tout triangle ABC non aplati dont les sommets appartiennent à $\mathcal{H}$.
On considère un tel triangle ABC et l'on note respectivement (x_A, y_A), (x_B, y_B) et (x_C, y_C) les coordonnées des points A, B et C dans le repère $\mathcal{R}$.
On rappelle enfin que l'orthocentre d'un triangle est le point d'intersection des hauteurs du triangle.

1° Soit $\mathcal{D}_A$ la hauteur issue de A.

i) Faire une figure soignée pour cette question 1°.
ii) Montrer que $\mathcal{D}_A$ a pour équation :

$$y = \frac{x_B x_C}{k}(x - x_A) + \frac{k}{x_A}.$$

iii) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{D}_A$ et de $\mathcal{H}$.
iv) En déduire que l'orthocentre H du triangle ABC appartient à $\mathcal{H}$.
v) Montrer que H est confondu avec A si et seulement si la hauteur $\mathcal{D}_A$ est tangente à $\mathcal{H}$.

2° Soit γ le cercle circonscrit au triangle ABC, de centre Ω de coordonnées (r,s) et de rayon R et dont l'équation $(x-r)^2 + (y-s)^2 = R^2$ dans le repère $\mathcal{R}$ est mise sous la forme

$$x^2 + y^2 - 2rx - 2sy + t = 0 \text{ avec } t = r^2 + s^2 - R^2.$$

i) Écrire une équation du quatrième degré donnant les abscisses des points d'intersection du cercle γ et de la courbe $\mathcal{H}$.
ii) Montrer que les quatre racines de cette équation du quatrième degré sont toutes réelles. Calculer le produit de ces quatre racines.
iii) En déduire que le symétrique de l'orthocentre H du triangle ABC par rapport à l'origine O appartient au cercle γ.

Exercice 3

L'espace affine euclidien de dimension trois est rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R}$ d'origine O et de base orthonormée $\beta = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soient a, b et c trois réels strictement positifs.
On considère les trois points A, B et C de coordonnées respectives $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ et $(0,0,c)$ dans le repère $\mathcal{R}$.
On considère alors le tétraèdre $OABC$.

Montrer que le carré de l'aire de la face du tétraèdre opposée au sommet O est égale à la somme des carrés des aires des autres faces du tétraèdre.

Exercice 4

On désigne par E l'espace vectoriel sur R des polynômes à une indéterminée X et à coefficients réels.
Soit n un entier naturel et soit A un polynôme de E dont le degré est égal à n.
On convient que A^0 représente le polynôme constant égal à 1 et, par récurrence, pour tout entier naturel k, $A^{k+1} = AA^k$.

On désigne par q_A (respectivement r_A) l'application de E dans E qui à tout polynôme P associe le quotient (respectivement le reste) de la division euclidienne de P par A.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que le degré n du polynôme A est supérieur ou égal à 1.

1° Montrer que q_A et r_A sont des endomorphismes de E.

2° Déterminer le noyau et l'image de q_A ainsi que le noyau et l'image de r_A.

3° Préciser l'endomorphisme $r_A \circ r_A$.

4° Soit m un entier naturel non nul et soit B un polynôme de E dont le degré est égal à m.
Montrer que $q_B \circ q_A = q_A \circ q_B = q_{AB}$.

5° On désigne par Id_E l'endomorphisme identique de E.
On pose $q_A^0 = Id_E$, et, par récurrence, pour tout entier naturel k, $q_A^{k+1} = q_A \circ q_A^k$.
Montrer que pour tout entier naturel k on a l'égalité $q_A^k = q_{A^k}$.

6° Pour tout polynôme P non nul et tout entier naturel k, on pose $R_k = (r_A \circ q_A^k)(P)$.

i) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel non nul j, on a :

$$P = q_A^j(P)A^j + \sum_{k=0}^{j-1} R_k A^k .$$

ii) En déduire que pour tout polynôme P non nul, il existe un entier naturel J et des polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_J$, P_J non nul, tous de degré strictement inférieur au degré n de A et tels que :

$$P = \sum_{k=0}^{J} P_k A^k .$$

iii) Cette décomposition est-elle unique ?